# Uke 44

Vi skal her se de to viktigste utvidelsene av første ordens logikk. I mange informatikk anvendelser inngår disse på en naturlig måte.

## Første ordens logikk med likhet

I tillegg til konnektiver og kvantorer har vi en likhetsrelasjon $=$ av type $U \times U \rightarrow BOOL$ . Den er altså som en binær relasjon og den tolkes som vanlig likhet. Vi har følgende sekventkalkyle regler:

=-suksedent

Nytt aksiom: $\Gamma \vdash \Delta , a=a$

=-antesedent

Ny regel: $$\frac{\Gamma , \Gamma^* , a=b \vdash \Delta , \Delta^*}{\Gamma \ , a=b \vdash \Delta}$$

Her er $\Gamma^*$ fått fra $\Gamma$ og $\Delta^*$ fra $\Delta$ ved å erstatte noen forekomster av $a$ med $b$ , eller $b$ med $a$ .

La oss gi bevis for refleksivitet, symmetri og transitivitet ved bruk av det nye aksiomet og den nye regelen.

Refleksivitet:

$$\bullet$$
$$\underline{\vdash a=a}$$
$$\vdash \forall x \; x=x$$

Symmetri:

$$\bullet$$
$$\underline{a=b \vdash b=a , a=a}$$
$$\underline{a=b \vdash b=a}$$
$$\underline{\vdash a=b \rightarrow b=a}$$
$$\underline{\vdash \forall y \, ( a=y \rightarrow y=a )}$$
$$\vdash \forall x \, \forall y \, ( x=y \rightarrow y=x )$$

Transitivitet:

$$\bullet$$
$$\underline{a=b , b=c \vdash a=c , a=b}$$
$$\underline{a=b , b=c \vdash a=c}$$
$$\underline{a=b \wedge b=c \vdash a=c}$$
$$\underline{\vdash a=b \wedge b=c \rightarrow a=c}$$
$$\underline{\vdash \forall z \, ( a=b \wedge b=z \rightarrow a=z)}$$
$$\underline{\vdash \forall y \, \forall z \, ( a=y \wedge y=z \rightarrow a=z)}$$
$$\vdash \forall x \, \forall y \, \forall z \, ( x=y \wedge y=z \rightarrow x=z)$$

# Flersortig logikk

I mange anvendelser er det naturlig å ha flere universer

## Eksempel – geometri

Her kan vi ha to universer L - linjer og P - punkter . Så har vi relasjoner mellom dem som

$R : L \times L \times P \to BOOL$ - to linjer skjærer hverandre I et punkt

$S : P \times P \times L \to BOOL$ - to punkter bestemmer linja mellom dem

Med slike relasjoner får vi et bra språk til å beskrive geometriske egenskaper.

## Eksempel - database for bestilling av flyreiser

Her kan vi ha mange universer

- F - flyruter
- P - passasjerer
- D - destinasjoner
- A - avganger

Så må vi finne fornuftige relasjoner mellom universene – og så videre …

Vi har utviklet sekventkalkyle for første ordens logikk. Da hadde vi bare et univers. Det er lett å utvide den kalkylen til en sekventkalkyle for flersortig logikk.

# Veien videre i logikk

- To aspekter – logikk som språk og logikk som kalkyle
- I tolkningene deler vi språket i to – logiske og ikke-logiske symboler
    - Logiske : konnektiver, kvantorer , … har fast tolkning
    - Ikke-logiske : relasjoner, funksjoner --- det er disse vi tolker
    - Signaturen til språket – typer til de ikke-logiske symbolene
- Kompletthetsteoremet (som vi ikke har vist) viser at om et utsagn er gyldig vil en fair utledning ende opp i et bevis. Om det ikke er gyldig, vil vi kunne finne en falsifikasjon fra en fair utledning. (Fair betyr at alt som han analyseres blir før eller senere analysert såfremt det ikke ender opp i et bevis.)
- Bruk av aksiomatisk metode tilå beskrive et kunnskapsområde – spesielt hvis vi ønsker som univers en datastruktur som endelige mengder, endelige multimengder, endelige lister, endelige stringer …
- Vi har sett hvordan kjøringer i automater kan simuleres med logikk – og at logikk er minst like kompleks som automataer. Dette kan utvides til mer allmenne beregninger og gir den interessante forbindelsen mellom beregninger og logikk.
- Drømmen om et universalspråk for menneskelig kunnskap og kalkyler for språket til å avgjøre hva som var gyldig i språket